Blowup profile for a heat equation with a nonlinear boundary condition

原田 潤一 (秋田大学 教育文化学部)

境界条件に非線形性を持つ熱方程式の爆発問題について考察する.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n_+,\ t \in (0,T), \\ \partial_\nu u = u^q, & x \in \partial\mathbb{R}^n_+,\ t \in (0,T), \\ u = u_0 > 0, & x \in \mathbb{R}^n_+,\ t = 0. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; x_n > 0\}$, $\partial_\nu = -\partial/\partial x_n$, $1 < q < n/(n-2)$ である. 本講演の目標は, 方程式 (1) の爆発時刻における空間的な特異性の強さを調べることである. ここでは原点が爆発点と仮定する. まずプロファイル関数 $U(x)$ を次で定義する.

$$U(x) = \lim_{t \to T} u(x,t) \in [0, \infty].$$

$x_n = |x| \cos\theta$ 方向に沿って $U(x)$ を調べてみると

$$U(x) = A(1 + o(1))(\cos\theta)^{\frac{-1}{q-1}} |x|^{\frac{-1}{q-1}}$$

となることが既存の結果より知られている ([1, 2]). この漸近公式が成立するのは $0 \le \theta < \pi/2$ のときだけである. $\theta = \pi/2$ は $x_n = 0$ に対応し, 境界上でのプロファイル関数 $U(x)$ を表すことになる. 境界上でのプロファイル関数 $U(x)$ についても調べられていて, 適当な条件下では, $|x| \ll 1$ のとき

$$\mathsf{k}_1 \left(\frac{|\log|x||}{|x|^2} \right)^{\frac{1}{2(q-1)}} \le U(x) \le \mathsf{k}_2 \left(\frac{|\log|x||}{|x|^2} \right)^{\frac{1}{2(q-1)}} \tag{2}$$

を満たすことが示されている ([3]). 本講演では, (2) に現れる係数 k_1, k_2 を同じ係数 k にとれることを報告する. 本結果を得るために, リスケールされた解に対して, その漸近挙動の詳細を調べることになる. その証明途中に現れる極限問題が解けるようになった点が本内容の進展である. この証明方法は藤田型方程式において既に [4, 5] によって与えられているもであり, 本結果はそれらを方程式 (P) に拡張したものである.

参考文献

[1] M. Fila, P. Quittner, The blow-up rate for the heat equation with a nonlinear boundary condition, Math. Methods Appl. Sci. Vol. **14** (1991) 197-205.

[2] J. Harada, Single point blow-up solutions to the heat equation with nonlinear boundary conditions, Differ. Equ. Appl. Vol. **5** no. 2 (2013) 271-295.

[3] J. Harada, Blow-up behavior of solutions to the heat equation with nonlinear boundary conditions, Adv. Differential Equations Vol. **20** no. 1-2 (2015) 23-76.

[4] M. A. Herrero, J. J. L. Velázquez, Blow-up profiles in one-dimensional, semilinear parabolic problems, Comm. Partial Differential Equations **17** no. 1-2 (1992) 205-219.

[5] M. A. Herrero, J. J. L. Velázquez, Flat blow-up in one-dimensional semilinear heat equations, Differential Integral Equations Vol. **5** no. 5 (1992) 973-997.