

# Coexistence steady states of a prey-predator model with population flux by attractive transition

久藤 衡介 (電通大・情報理工)\*

次のような非線形楕円型方程式系に対する Dirichlet 問題について考える：

$$\begin{cases} d_1 \Delta u + u(m_1 - u - cv) = 0 & \text{in } \Omega, \\ d_2 \Delta v + \alpha \nabla \cdot \left[ u^2 \nabla \left( \frac{v}{u} \right) \right] + v(m_2 + bu - v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\Omega$  は  $\mathbb{R}^N$  の有界領域で境界  $\partial\Omega$  は滑らかとする。なお、 $d_i, \alpha, m_1, b, c$  は正定数で、 $m_2$  は実数定数とする。(1) は数理生物学の Lotka-Volterra 系の定常問題で、領域  $\Omega$  に棲息する食われる食うの関係にある 2 種の生物の個体数密度を記述するモデルである。未知関数  $u$  と  $v$  がそれぞれ被食生物と捕食生物の定常的な個体数密度を表す。第 2 式の非線形拡散項  $\alpha \nabla \cdot [u^2 \nabla (v/u)]$  は、捕食生物が餌である被食生物の高密度な場所へ移動する傾向を模している。生物種の非線形拡散や移流のプロトタイプとしては、重定-川崎-寺本モデルにおける交差拡散項や Keller-Segel モデルにおける走化性の項が有名で、盛んに研究がされている。生物種の拡散のモデル化の見地では、交差拡散項は生物種の空間的遷移確率が出発点に依存する状況を模している。一方で、(1) の非線形拡散項  $\alpha \nabla \cdot [u^2 \nabla (v/u)]$  は、捕食生物の遷移確率が、到達点における被食生物の密度に依存する状況を模している (Okubo-Levin [1])。このタイプの非線形拡散項は、交差拡散項や走化性の項に比べると、数学的な研究が進んでいないように思われる。そこで本講演では、(1) の正值解集合の大域的分岐構造を考える。非線形拡散項  $\alpha \nabla \cdot [u^2 \nabla (v/u)]$  が解構造に与える効果を数学的に引き出すことが主目的である。

準備として、正定数  $d, m$  に対して、次の定常ロジスティック方程式に対する Dirichlet 問題を考える：

$$d \Delta u + u(m - u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

この問題は、 $m > d\lambda_1$  のときに限り正值解をもつことが知られている。ここで、 $\lambda_1$  は Dirichlet 境界条件下の  $-\Delta$  の最小固有値である。そこで、その正值解を  $\theta_{d,m}(x)$  と表すことにする。(1) は  $m_1 > d_1 \lambda_1$  のとき半自明解  $(u, v) = (\theta_{d_1, m_1}, 0)$  をもち、 $m_2 > d_2 \lambda_1$  のとき半自明解  $(u, v) = (0, \theta_{d_2, m_2})$  をもつことが分かる。また、 $m_1 \leq d_1 \lambda_1$  のとき、(1) は正值解をもたないことが容易に確かめられる。

ここでは、 $m_1 > d_1 \lambda_1$  を任意に固定して、 $m_2 \in \mathbb{R}$  をパラメーターとした (1) の正值解集合

$$S := \{ (u, v, m_2) \in C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R} \mid (u, v) \text{ は (1) の正值解} \}$$

の大域分岐構造を調べる：

本研究は大枝和浩氏 (早大・グローバルエデュケーションセンター) との共同研究に基づく。

\* e-mail: k-kuto@uec.ac.jp

定理 1. 任意の  $(m_1, \alpha, d_1, d_2, b, c) \in (d_1\lambda_1, \infty) \times \mathbb{R}_+^5$  に対して, 連続関数  $f(m_1, \alpha, d_1, d_2, b)$  および  $g(m_1, d_1, d_2, c)$  が存在して,  $\mathcal{S}$  は  $m_2 = f(m_1, \alpha, d_1, d_2, b)$  で半自明解  $(\theta_{d_1, m_1}, 0)$  から分岐し,  $m_2 = g(m_1, d_1, d_2, c)$  で半自明解  $(0, \theta_{d_2, g(m_1, d_1, d_2, c)})$  に結合するような有界な連結集合を含む. このとき,  $(f, g)$  の挙動に関して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \lim_{m_1 \downarrow d_1\lambda_1} f(m_1, \alpha, d_1, d_2, b) &= \lim_{m_1 \downarrow d_1\lambda_1} g(m_1, d_1, d_2, c) = d_2\lambda_1, \\ \lim_{m_1 \rightarrow \infty} f(m_1, \alpha, d_1, d_2, b) &= -\infty, \quad \lim_{m_1 \rightarrow \infty} g(m_1, d_1, d_2, c) = \infty. \end{aligned}$$

さらに, 非線形拡散項の係数  $\alpha$  を無限大にしたとき, 正值解の漸近挙動は 2 種類に分類されることが分かった:

定理 2. 任意の  $(m_1, m_2, d_1, d_2, b, c) \in (d_1\lambda_1, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^4$  に対して,  $\{(u_n, v_n)\}$  を (1) で  $\alpha = \alpha_n \rightarrow \infty$  とした正值解の列とする. このとき, 適当な部分列を取ると, 次の (i), (ii) のいずれかが成り立つ:

(i)  $\{\alpha_n \|u_n\|_\infty\}$  が非有界であって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = \left( (1-s)\theta_{d_1, m_1}, \frac{s}{c}\theta_{d_1, m_1} \right) \text{ in } C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}). \quad (2)$$

ここで,  $s \in [0, 1]$  は次で定められる:

$$s \left( b + \frac{1}{c} \right) = b + \frac{d_2}{d_1} + \left( m_2 - \frac{d_2}{d_1} m_1 \right) \frac{\|\theta_{d_1, m_1}\|_{L^1}}{\|\theta_{d_1, m_1}\|_{L^2}^2}.$$

(ii)  $\{\alpha_n \|u_n\|_\infty\}$  が有界であって, ある関数  $(w, v) \in C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega})$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n u_n, v_n) = (w, v) \text{ in } C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}).$$

ここで,  $(w, v)$  は次の極限系の非負値解である:

$$\begin{cases} d_1 \Delta w + w(m_1 - cv) = 0, & \text{in } \Omega, \\ \Delta v + \frac{v}{d_2 + w} \left\{ \frac{w}{d_1} (m_1 - cv) + m_2 - v \right\} = 0, & \text{in } \Omega, \\ w = v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

この定理で, (2) の極限関数の集合は  $(\theta_{d_1, m_1}, 0)$  と  $(0, \theta_{d_1, m_1}/c)$  を結ぶ直線を形成している. この直線上の解は, 次のような積分条件を伴い, 拡散係数が等しい Lotka-Volterra 競争系 ((1) で  $\alpha \rightarrow \infty$  とした極限系) をみたす:

$$\begin{cases} d_1 \Delta u + u(m_1 - u - cv) = 0 & \text{in } \Omega, \\ d_1 \Delta v + v(m_1 - u - cv) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \frac{d_2}{d_1} \int_{\Omega} v(m_1 - u - cv) = \int_{\Omega} v(m_2 + bu - v). \end{cases}$$

## 参考文献

- [1] A. Okubo, S. A. Levin, *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspective*, Second edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, 14, Springer-Verlag, New York, 2001.